Hallar base, r(A), Ca, Ra p(A), v(A) y determinar si los vectores v1, v2 E a NA

Hallar base, r(A), Ca, Ra p(A), v(A) y determinar si los vectores v1, v2 E a NA

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad v1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución ejercicio.

Para la resolución de este ejercicio es necesario tener en claro los conceptos de NA, r(A), Im(A) y base de un espacio vectorial así mismo, los teoremas que los involucran.

Un espacio nulo (NA) es uno o un conjunto de vectores que anula la matriz, es decir, los vectores solución de la matriz. Para que se entienda mejor, haga de cuenta la solución de las variables de una ecuación sencilla, pero en este caso por tratarse de matrices y espacios vectoriales, se hablara de vectores.

NA = todos los vectores X que cumplan: AX = 0, es decir, el vector X multiplicado por la matriz debe ser igual a cero.

Para poder aplicar AX = 0, la matriz A debe estar expresada como ecuación, es decir, haga de cuenta que está resolviendo un sistema de ecuaciones matricial por gauss jordan.

Pivoteando al máximo la matriz queda como:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Intercambio}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

A simple vista vemos pivotes para X1 y X3. Esta matriz tiene solución infinita.

Ahora si podemos efectuar el producto AX = 0 para hallar el espacio nulo (NA)

Como se hará un producto de matrices, entonces se necesita expresar a X como matriz, en este caso de 5x1 por tener la matriz cinco columnas, quiere decir que hay cinco “variables incógnitas”

Entonces:

$$X = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \end{bmatrix}$$

Esta matriz esta expresada en términos generales, luego podemos decir que pertenece al espacio NA.

Efectuamos el producto:

$$\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} x1-x2-2x4-x5=0 \\ x3-x4-x5=0 \end{array}$$

Luego,

$$X = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x2+2X4+X5 \\ x2 \\ x4+x5 \\ x4 \\ x5 \end{bmatrix} = x2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Y, como el espacio nulo (NA) = vectores X que cumplan: AX = 0, entonces:

$$NA = GEN \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ya tenemos el espacio nulo, ahora sigue la magia gracias al legado de los grandes matemáticos.

Tenemos entonces que:

$$Im(A) = GEN \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

Nulidad (r (A)) = 2

Y una base válida para N(A) es: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

p(A) = 2 (columnas con pivote), v(A) = 3 (columnas sin pivote)

$$cA = GEN \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

rA = GEN {(1, -1, -2, 0, 1), (-2, 2, 3, 1, -1), (1, -1, -2, 0, 1)}

Ahora, para que los vectores v1, v2 pertenezcan al espacio nulo NA deben cumplir la forma: AX = 0

Se puede hacer el producto con la matriz A y no cumple, por lo cual no hacen parte de NA.

Como se puede apreciar, es más importante entender la teoría y la aplicación de teoremas, pues los demás es simplemente pivotear una matriz.

☺